



7. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben





7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 071231:

Drei gleich große Holzkugeln mit einem Radius der Länge r , die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte.

Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?

Aufgabe 071232:

Es ist das Produkt

$$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ \sin 85^\circ$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.

Beispiel: $\sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Aufgabe 071233:

Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

Aufgabe 071234:

Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt

$$f(x + 1) = (x + 1) \cdot f(x) \tag{1}$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.

Beweisen Sie!

Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$\varphi(x + 1) = (x + 1)\varphi(x), \tag{2}$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.



Aufgabe 071235:

In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)

Beweisen Sie, daß man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, daß in ihnen alle sechs Farben auftreten!

Aufgabe 071236:

Beweisen Sie, daß es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d.h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, daß diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!