7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071221:

Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leqslant x_k \leqslant 2$ und $0 \leqslant y_k \leqslant 2$ erfüllen.

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k(x_k; y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!

   Anmerkung: Dabei gelten zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 genau dann als gleich, wenn jede Ecke von Δ_1 auch Ecke von Δ_2 ist.

b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

Aufgabe 071222:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat. Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

Aufgabe 071223:

Beweisen Sie, daß für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 071224:

Beweisen Sie, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

Aufgabe 071225:

Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x \cdot (ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y \cdot (ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$.

Aufgabe 071226:

Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft.

Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.