



6. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben





6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 061231:

In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n \geq 2$) so verteilt, daß es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.

Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können.

Aufgabe 061232:

Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M .

Wie groß ist der Abstand den Geraden BC und AM ?

Anmerkung: Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY , die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g , Y liegt auf h , $XY \perp g$, $XY \perp h$.

Aufgabe 061233:

Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$ positiv ist und alle diejenigen reellen Zahlen x , in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist.

Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

Aufgabe 061234:

Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x , die der Gleichung $\left[\frac{5 + 6x}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}$ genügen.

Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z.B. ist $\left[\frac{13}{2} \right] = 6$; $[-6, 5] = -7$ und $[6] = 6$.

Aufgabe 061235:

Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, 3, \dots, n$ nebeneinander aufgestellt. Ein Umordnungsbefehl besteht darin, daß jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.

Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ entsteht.



Aufgabe 061236:

Die Zahl $\sin 10^\circ$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten.

Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.