



5. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

Aufgaben





5. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 051241:

Man ermittle alle reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die

$$(a + b)^n = a^n + b^n \text{ gilt.}$$

Aufgabe 051242:

An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren. Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.

Es ist zu beweisen, daß es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, daß an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren, und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat. (Es wird vorausgesetzt, daß der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.)

Aufgabe 051243:

Unter allen Strecken MN , die das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

Aufgabe 051244:

Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4) , für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \tag{2}$$

$$x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2 \tag{3}$$

$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2 \tag{4}$$

Aufgabe 051245:

Man beweise, daß $\tan 7^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ gilt

Aufgabe 051246:

Man beweise den folgenden Satz:

Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche).