



4. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben





4. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 041241:

Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

Aufgabe 041242:

Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 109, 151, 491 die Zahl

$$z = 1963^{1965} - 1963 \text{ teilbar ist.}$$

Aufgabe 041243:

Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben. Jedes Parallelogramm sei nicht entartet, d.h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Die durch die Parallelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein. Die Strecken AA' , BB' , CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A'' , B'' , C'' , D'' .

Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A'' , B'' , C'' , D'' gebildete Figur machen?

Aufgabe 041244:

Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so groß wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Kreises ist!

Aufgabe 041245:

Ermitteln Sie alle Zifferntripel (x, y, z) mit $x, y, z \neq 0$, mit denen

$$\sqrt{(xxx\dots x) - (yyy\dots y)} = (zzz\dots z) \tag{1}$$

$(xxx\dots x)$: $2n$ Ziffern; $(yyy\dots y)$: n Ziffern; $(zzz\dots z)$: n Ziffern

für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist! Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

Aufgabe 041246:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

Sind α , β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?