4. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041231:

In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:

1) a ist eine rationale Zahl.
2) a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3) a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4) a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
5) a ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8\,000$.
6) a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, daß von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Wie lautet die Zahl a! Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Aufgabe 041232:

Es sei $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit reellen Zahlen a, b, c, d als Koeffizienten ($c \neq 0$).

Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \to y = f(x)$ eine Funktion definiert? Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a, b, c, d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

Aufgabe 041233:

Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen.

Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d.h. für den $\sphericalangle APB \geq \sphericalangle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Aufgabe 041234:

Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$

erfüllt?

Aufgabe 041235:

Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Aufgabe 041236:

Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d.h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.

Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in *einer* Ebene oder auf der Oberfläche *einer* Kugel liegen.