4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Saison 1964/1965

Aufgaben

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

OJM

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

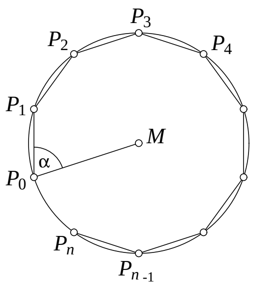
<u>Aufgabe 041111:</u>

Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muß jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

<u>Aufgabe 041112:</u>



In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius $\overline{MP_0}$ den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ... reflektiert (s. Abb.).

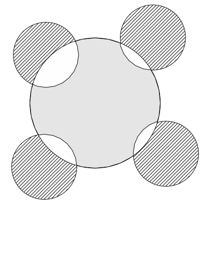
a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!

b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?

c) Es sei $\alpha = 50°$. Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

<u>Aufgabe 041113:</u>

Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, daß diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (s. Abb.).



a) Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt der in der Abb. grauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage läßt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Aufgabe 041114:

Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Aufgabe 041115:

Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0 \\ 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0. \end{aligned}$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Aufgabe 041116:

Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1\,620 + 12 \cdot \sqrt{17\,457}} + \sqrt[3]{1\,620 - 12 \cdot \sqrt{17\,457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.