3. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1963/1964

Aufgaben

3. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031241:

Beweisen Sie, daß für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 031242:

Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen:

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m} = 0.$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

Aufgabe 031243:

Gegeben sein ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind.

Beweisen Sie, daß dann folgende Punkte zusammenfallen:

a) der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel,

b) der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel!

Aufgabe 031244:

Es bezeichne a_n die letzte Ziffer der Zahl $n^{(n^n)}$ (n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$).

Beweisen Sie, daß die Zahlen a_n eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an!

Aufgabe 031245:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$. Auf der Seite $\overline{BC}$ liege ein Punkt P, wobei $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\sphericalangle APC = 60°$ sind.

Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonometrie die Größe des Winkels γ ermitteln.

Aufgabe 031246:

Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.

b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.

d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.