3. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1963/1964

Aufgaben

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031231:
Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen!

Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Aufgabe 031232:
Beweisen Sie folgenden Satz:

Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 031233:
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von der reellen Zahl p – alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2) \qquad xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2)\,!$$

Aufgabe 031234:
Für welche reellen Zahlen x ist

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x+\frac{1}{2}}, \qquad \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}, \qquad \text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+\frac{1}{2}}\,?$$

Aufgabe 031235:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $\overline{XY} = \overline{AB}$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche $ABCD$ sind.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

Aufgabe 031236:
Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B. Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.

b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.

c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.

d) Es ist $r_1 = 2r_2$.