3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1963/1964

Aufgaben

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031211:

Von den Punkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man mißt folgende Winkel:

$$\sphericalangle \mathrm{DAB} = 80^\circ, \quad \sphericalangle \mathrm{CAB} = 30^\circ, \quad \sphericalangle \mathrm{ABC} = 60^\circ, \quad \sphericalangle \mathrm{ABD} = 20^\circ.$$

Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ beträgt 2 km. Wie kann man die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln?

a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!

b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmäßige Berechnung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 031212:

Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:

$$P(N) = a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3 + a_4 N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!

b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16$!

Aufgabe 031213:

Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1,$$
$$x_1 + x_3 = px_2,$$
$$x_1 + x_2 = px_3$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

Aufgabe 031214:
Man beweise:

Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Aufgabe 031215:
Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Innern des Kreises.

Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?

Aufgabe 031216:
Es ist

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen“. Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen“ irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne daß sich die dargestellte rationale Zahl ändert?