3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Saison 1963/1964

Aufgaben

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031111:

Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.

a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt? Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde $R = 6\,370$ km.)

Aufgabe 031112:

Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)

b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Aufgabe 031113:

Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 031114:

Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Aufgabe 031115:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und den nicht parallelen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch H schneide die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.

Beweisen Sie, daß die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Aufgabe 031116:

Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1 000 050.

Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?