2. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1962/1963

Aufgaben

2. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021241:

a) Beweisen Sie, daß der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!

b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 021242:
Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leq 1\,?$$

Aufgabe 021243:
Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 021244:
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, daß die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet.

Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.

Aufgabe 021245:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke PQ von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, daß ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

Aufgabe 021246:

Gegeben sei eine Pyramide $ABCD$, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, daß N auf DB und P auf DC liegen und $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.

a) Beweisen Sie, daß auch $BCPN$ ein Sehnenviereck ist!

b) Beweisen Sie, daß die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!