2. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1962/1963

Aufgaben

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021221:

Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L. W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:

In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:

a) 3 Fräsmaschinen,

b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,

c) 1 Automat.

Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:

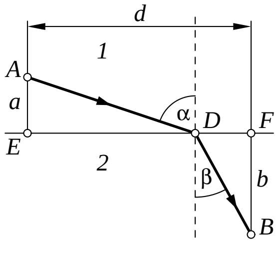
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,

b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,

c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.

Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

Aufgabe 021222:



Ein Lichtstrahl, der in einem Medium *1* die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium *2* die Geschwindigkeit c_2.

Beweisen Sie, daß die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

ist!

Aufgabe 021223:

a) Beweisen Sie, daß für jedes ebene Dreieck gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}.$$

b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 021224:

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb $\overline{AB}$ so, daß $\overline{CE} = \overline{CB}$ ist!

Auf der Strecke $\overline{CE}$ bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, daß $\overline{CA} = \overline{CD}$ ist!

a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Stecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?

b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage der Punktes C zu beweisen.

Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, daß *jeder* seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 021225:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist!

Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!